CHE COS'È LA MATEMATICA (2)

OVVERO PERCHÉ CI PIACE LA MATEMATICA

*di Marco Bramanti**

Perché a qualcuno piace la matematica? Accanto a ragioni legate ad aspetti metodologici, che l'autore ha affrontato nel numero precedente e che costituiscono elementi di fascino per molti, ve ne sono altre di contenuto. In generale, i matematici sono molto sensibili alla bellezza dei risultati. Ma quali sono i criteri estetici dei matematici, a questo riguardo? Che cosa può «piacere» in un teorema o in una teoria? L'autore illustra alcuni di questi aspetti, attraverso esempi di portata abbastanza generale.

*Associato di Analisi Matematica presso il Politecnico di Milano.

Nel contributo pubblicato sul numero precedente di questa rivista, abbiamo osservato la matematica prima nella sua forma «statica» di insieme di conoscenze strutturate come sistema ipotetico deduttivo, e ne abbiamo descritto la natura di sapere necessario, stabile, universale, astratto; la dimostrazione come ricerca di nessi, spiegazione dei perché. Quindi abbiamo osservato la matematica nella sua forma «dinamica» di ricerca di nuovi risultati, riflettendo sul ruolo della congettura, e su certe caratteristiche della ricerca matematica che la fanno assomigliare a una ricerca empirica, sia pur in un universo di oggetti astratti. Fin qui si trattava di caratteristiche metodologiche.
Accanto a queste, ci sono naturalmente caratteristiche di contenuto, che rendono la matematica interessante per qualcuno. «Cose» che si trovano in matematica, e che a qualcuno piacciono. Di questo intendo occuparmi in questa seconda parte del mio intervento. In generale, i matematici sono molto sensibili alla bellezza dei risultati. Qualcuno potrà sorridere di questo, ma si può realmente affermare che uno dei criteri che maggiormente guida i matematici nel valutare un risultato, un argomento di ricerca, o un problema, è il criterio estetico. Proverò a esplicitare qualcuno di questi criteri di tipo estetico, che per loro natura non sono del tutto esplicitabili, né condivisi da tutti. Tuttavia, penso che le sottolineature che farò tocchino alcuni tasti a cui molti matematici sono sensibili.

Generalizzare. Le buone idee vanno lontano

In matematica si osserva che le buone idee non solo sopravvivono a lungo, ma «vanno lontano», ossia vengono incorporate nei successivi

sviluppi che ne costituiscono una generalizzazione. Queste generalizzazioni non oscurano il valore dell'idea originale, ma anzi ne mostrano la fecondità. Il caso più elementare rimane una sorta di riferimento solido, rassicurante, nella costruzione più generale.
«L'arte di far matematica consiste nel trovare quel caso speciale che contiene tutti i germi della generalità».[1]
Per esempio: gli spazi di Hilbert sono spazi di dimensione infinita, in cui vale un'opportuna versione del teorema di Pitagora. Così un'idea semplice e profonda, vecchia di duemila anni, è riletta in una forma più generale e astratta. La lunghezza di un vettore viene calcolata come radice quadrata della somma dei quadrati di infinite lunghezze, come se ragionassimo su ipotenusa e cateti di un triangolo rettangolo con infiniti cateti. E quando applichiamo questa versione più generale del teorema per calcolare la norma di una funzione mediante un'opportuna serie numerica, o - in una delle possibili interpretazioni fisiche di questo teorema - calcoliamo l'energia di un segnale come somma delle energie delle sue infinite armoniche, ci affascina la generalità a cui è stato spinto il buon vecchio teorema di Pitagora, e viceversa il pensiero di questo teorema «elementare» ci rassicura nell'uso della sua versione più astratta, ci fa sentire quest'ultima più familiare, più intuitiva, più nostra.
I matematici apprezzano esteticamente il fatto di ritrovare un teorema semplice, elementare, ben noto, ma importante, come caso particolare di (e al tempo stesso come ispirazione per) un risultato molto più generale, astratto e potente. È come essere in mezzo a un gruppo di persone sconosciute e che mettono un po' in soggezione, e incontrare tra loro un vecchio amico: ci sentiamo subito più a nostro agio.

Simmetria e semplicità

Introduciamo quest'idea citando alcuni teoremi.

Teorema 1
Tra tutti i solidi la cui superficie ha area assegnata, quello di volume massimo è la sfera.

Teorema 2
Tra tutte le sbarre di materiale fissato, la cui sezione ha area fissata (ma forma qualsiasi), quella che ha la massima rigidità alla torsione è quella di sezione circolare.

Teorema 3
Tra tutti i tamburi la cui membrana ha area fissata e materiale fissato (ma forma qualsiasi), quello che produce la nota più bassa è quello circolare.

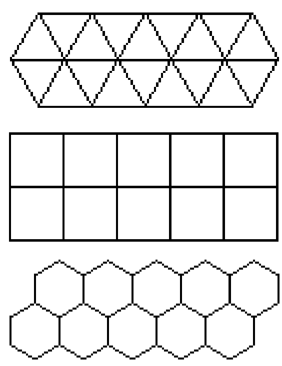
[1]D. Hilbert (1862-1943), in: N. Rose, *Mathematical Maxims and Minims*, Rome Press. Inc., Raleigh NC, 1988.
[2]Per esempio l'ultimo si potrebbe enunciare così: *Tra tutti i domini piani di area fissata e forma qualsiasi, quello per cui il primo autovalore dell'operatore di Laplace è minimo è il cerchio.*
[3]A proposito della «dimostrazione come spiegazione del perché», cfr.: M. Bramanti, *Che cos'è la matematica*, in *Emmeciquadro* n. 17, aprile 2003.

Gli ultimi due teoremi sembrano parlare più di fisica che di matematica, ma si possono formulare in termini puramente matematici.[2]
Questi teoremi hanno una struttura comune: rispondono a problemi variazionali, ossia: data una famiglia di infiniti oggetti matematici (insiemi, funzioni, eccetera), trovare quello che rende massima o minima una certa quantità. Nel *Teorema 1*, per esempio, si considera la famiglia di tutti i solidi la cui superficie ha area fissata. La cosa notevole è che questa famiglia è vastissima, a priori non ben delimitata (cos'è un solido? bisognerebbe precisarlo), e sicuramente tra i suoi elementi ve ne sono tanti «orribili», solidi dalle forme irregolari e stranissime, eppure, tra tutti questi oggetti, numerosi e complicati, quello che risolve il problema in questione è il più semplice e il più simmetrico di tutti: la sfera. Lo stesso fenomeno si presenta negli altri due teoremi.
Questo piace molto ai matematici: scoprire che la soluzione di un problema è un oggetto semplice e simmetrico, a dispetto del fatto che a priori lo cercassimo in mezzo a tantissimi altri oggetti irregolari. Questa semplicità, regolarità, simmetria, che emerge a posteriori, da ciò che a priori è generico (e quindi potenzialmente irregolare e complicato), è qualcosa che i matematici trovano molto elegante. Credo che qualunque matematico sottoscriverebbe l'affermazione: «il *Teorema 1* è un enunciato semplice ed elegante».
Attenzione: «enunciato semplice» non significa «teorema semplice da dimostrare»! Questi risultati possono essere molto difficili da dimostrare. Il punto è che per dimostrare che la sfera ha volume massimo tra i solidi di ugual superficie, devo confrontare il volume della sfera col volume del generico solido di ugual superficie, e questo generico solido è potenzialmente un oggetto complicato, perciò difficile da trattare. La dimostrazione dunque è difficile, richiede delle buone idee. D'altronde, forse ci farà capire meglio perché le cose stanno proprio così.[3]

Dare un volto concreto a ciò che è astratto: i teoremi di classificazione

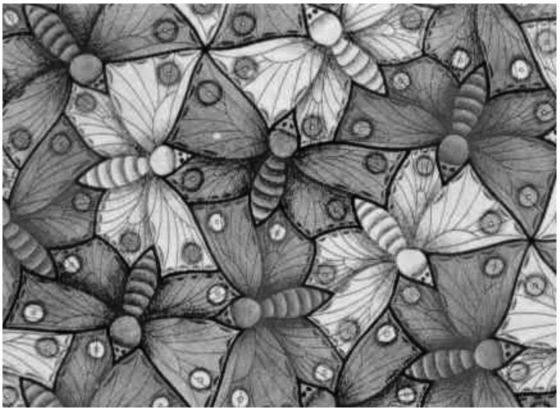
Le piastrellature regolari del piano

Una piastrellatura del piano è un rivestimento del piano mediante «piastrelle» (figure geometriche), a condizione che: le piastrelle siano tutte uguali tra loro; le piastrelle ricoprano tutto il piano; le piastrelle combacino tra loro senza sovrapporsi. Inoltre, si dice piastrellatura regolare una piastrellatura ottenuta prendendo come piastrella-tipo un poligono regolare.



Teorema
Sono possibili solo 3 tipi di piastrellature regolari del piano: mediante triangoli equilateri, mediante quadrati, mediante esagoni regolari.

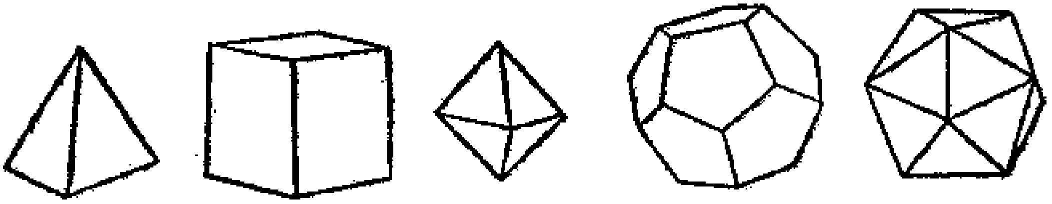
Invece, le piastrellature non regolari del piano, sono infinite. Maurits C.Escher (1898-1972) si è divertito a inventarne alcune artistiche: ecco a lato una piastrellatura del piano per mezzo di ... farfalle.



I poliedri regolari

Definizione. Diciamo che un poliedro è regolare se: tutte le sue facce sono uguali tra loro; ogni faccia è un poligono regolare; in ogni vertice si forma lo stesso angolo solido.

Teorema
I poliedri regolari sono solo 5 (i cosiddetti «solidi platonici»):
tetraedro (le facce sono 4 triangoli equilateri)
cubo (le facce sono 6 quadrati)
ottaedro (le facce sono 8 triangoli equilateri)
dodecaedro (le facce sono 12 pentagoni regolari)
icosaedro (le facce sono 20 triangoli equilateri).



Questi due teoremi geometrici sono esempi di teoremi di classificazione. La geometria e l'algebra sono piene di teoremi di classificazione. Si dà una definizione astratta (per esempio «poliedro regolare») e poi ci si chiede: chi sono in concreto gli oggetti che soddisfano questa definizione? Si scopre che sono certi tipi e non di più. La cosa importante del teorema non è tanto l'affermare che quei 5 solidi hanno le proprietà in questione (questa è una verifica), quanto l'affermare che non ce ne sono altri.

Quando un matematico dice «e non ce ne sono altri» fa sul serio. Ha escluso la possibilità logica che ce ne siano altri, e a nessuno capiterà mai di incontrarne altri. L'argomento è chiuso, per così dire. Dunque quella nozione astratta è perfettamente compresa: ora vediamo «chi sono» i poliedri regolari. E questo ci piace molto. Questo è il fascino dei teoremi di classificazione.
Apriamo una parentesi sui solidi platonici. Come suggerisce il nome, queste cinque figure erano già note nell'antichità, e apprezzate per la loro estrema simmetria. Nel millecinquecento Keplero fu guidato nelle sue riflessioni sui moti dei pianeti intorno al sole, che lo avrebbero portato a formulare le sue famose tre leggi, dalla seguente idea, falsa: che le orbite dei sei pianeti del sistema solare (allora se ne conoscevano solo sei) fossero poste a certe distanze e non altre, perché tra le sei sfere si inscrivevano perfettamente i cinque solidi platonici. Il fatto dimostra l'estrema ammirazione che questi solidi destavano in un uomo come Keplero. L'elemento estetico è spesso presente nella storia delle idee scientifiche.

Dare un volto concreto a ciò che è astratto: i teoremi di rappresentazione

Per spiegare cosa si intende per teoremi di rappresentazione, introduciamo il seguente esempio geometrico, abbastanza elementare. Consideriamo l'insieme V dei vettori dello spazio ordinario (tridimensionale), e diamo la seguente definizione astratta: chiameremo funzionale lineare su V una legge L che associa a ogni vettore un numero reale, e soddisfa inoltre la proprietà di linearità:

$$L(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) = \alpha L(\boldsymbol{u}) + \beta L(\boldsymbol{v})$$

per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e di numeri reali α, β.
Chiediamoci quali possono essere degli esempi concreti di funzionali lineari su V. Un modo di costruirne è il seguente. Consideriamo un vettore $\boldsymbol{u}$, fissato una volta per tutte; dato ora un qualsiasi altro vettore $\boldsymbol{v}$, consideriamo il prodotto scalare $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$. Com'è noto, il prodotto scalare di due vettori è un numero, e precisamente è il prodotto delle lunghezze dei due vettori per il coseno dell'angolo da essi formato. Se ora, al variare di $\boldsymbol{v}$ in tutti i modi nell'insieme V dei vettori, consideriamo la legge che a $\boldsymbol{v}$ associa il numero $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, otteniamo proprio un funzionale lineare su V, com'è facile verificare in base alle proprietà del prodotto scalare.
Questo è solo un esempio; chiediamoci ora: esistono funzionali lineari su V di altri tipi, definiti in modi diversi, che non hanno niente a che fare col prodotto scalare? Il buon senso e la prudenza sug-

gerirebbero di rispondere: perché no? Dopo tutto, la definizione di funzionale lineare è molto astratta, non sembra strettamente legata, di per sé, a quella di prodotto scalare. Sorprendentemente, invece, si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema di rappresentazione
Ogni funzionale lineare su V si può rappresentare come prodotto scalare per un vettore fissato. Precisamente: per ogni funzionale lineare L esiste un vettore $\boldsymbol{u} \in V$ che rappresenta L nel senso che

$$L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} \text{ per ogni } \boldsymbol{v} \in V.$$

Il teorema precedente è l'esempio elementare di una vasta classe di teoremi di analisi funzionale (una branca dell'analisi matematica) che prendono il nome di teoremi di rappresentazione. In queste versioni più generali, al posto dello spazio V dei vettori tridimensionali si considera un opportuno spazio di funzioni, oppure uno spazio «astratto», come gli spazi di Hilbert, cui ho accennato in precedenza; si dà poi una definizione astratta di funzionale lineare e continuo sullo spazio in questione. In questo contesto, un teorema di rappresentazione dice che i funzionali lineari continui su un certo spazio sono «tutti e soli» quelli che si rappresentano in un certo modo «concreto».
Di nuovo, lo spirito del teorema è dare un volto concreto a un concetto che a priori è definito in termini di proprietà astratte. Non solo si possono costruire concretamente funzionali lineari continui con un certo procedimento, ma vale il viceversa: per il fatto solo di obbedire alla definizione astratta di funzionale lineare continuo, quell'oggetto deve necessariamente potersi costruire concretamente in un certo modo.
Anche qui come per i teoremi di classificazione, il frutto del teorema è che la nozione astratta di funzionale lineare continuo su un certo spazio viene perfettamente compresa e dominata: ora vediamo «chi sono» i funzionali lineari continui su tale spazio. E questo ci piace.

La mia teoria è meglio di me: i teoremi di esistenza e unicità

Un altro cavallo di battaglia dei matematici è dato dai teoremi di esistenza, i teoremi di unicità, e, colpo grosso quando riescono, i teoremi di esistenza e unicità. Lo schema logico generale è il seguente. Abbiamo un problema, che contiene dei dati e delle incognite. Incognite e dati possono essere oggetti matematici di vario tipo, a seconda del problema di cui si parla: numeri, vettori, funzioni, eccetera.
In realtà, spesso il matematico non affronta un problema singolo, ma piuttosto è interessato ad affermare qualcosa di generale su un'intera classe di problemi. Idealmente, la nostra classe di problemi si può vedere come una sorta di «scatola nera» con un ingresso e un'uscita: all'in-

gresso si inseriscono i dati, e la scatola nera restituisce in uscita la soluzione (ossia il valore delle incognite).
I seguenti esempi possono rendere più concreto il discorso, ma non sono essenziali per la comprensione dell'idea di fondo che qui mi interessa comunicare.

Esempio 1, dall'algebra lineare
Il sistema di 3 equazioni lineari in 3 incognite x, y, z:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

I coefficienti a_{ij} si suppongono assegnati una volta per tutti; il dato del problema è allora il vettore dei termini noti delle 3 equazioni (b_1, b_2, b_3); l'incognita è il vettore dei 3 valori (x, y, z) che, sostituiti al posto delle variabili, soddisfano contemporaneamente le tre equazioni.

Esempio 2, dall'analisi matematica
Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La funzione $f(x,y)$ si suppone assegnata una volta per tutte; il dato ora è il numero y_0 (detto «condizione iniziale»), l'incognita è la funzione $y(x)$ che soddisfa sia l'equazione differenziale $y'(x) = f(x,y)$ che la condizione $y(0) = y_0$.

Per dare contorni precisi al problema, bisogna precisare in quale insieme B si assegna il dato, e in quale insieme A si cerca la soluzione x.
Un teorema di esistenza dice: comunque si assegni il dato b nell'insieme B, il problema ha «almeno una» soluzione x in A. (Però potrebbe averne più di una).
Un teorema di unicità dice: comunque si assegni il dato b nell'insieme B, il problema ha «non più di una» soluzione x in A. (Però potrebbe non averne nessuna).
Un teorema di esistenza e unicità, ovviamente, dice: comunque si assegni il dato b nell'insieme B, il problema ha «una e una sola» soluzione x in A.
Inutile dire che i matematici, soprattutto i «teorici», vanno matti per i teoremi di esistenza e unicità; e questo spesso suscita l'ilarità degli «applicati» (per esempio gli ingegneri) che inventano barzellette sui matematici, a riguardo. Infatti dicono: cosa importa sapere in astratto che un problema ha soluzione? La cosa

interessante è saper risolvere effettivamente il problema! Il teorema di esistenza insegna come trovare la soluzione? La risposta è che spesso il teorema non lo dice proprio. Si dice per questo che è un teorema «non costruttivo». Negli esempi citati: per i sistemi lineari (*Esempio 1*), si dimostra un teorema di esistenza e unicità, il Teorema di Cramer, che dice come trovare la soluzione, ossia è costruttivo; per il problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie (*Esempio 2*), invece, si dimostra un teorema di esistenza e unicità non costruttivo.

Più in generale, l'analisi matematica è piena di teoremi non costruttivi, perché tutta l'analisi si fonda sulle proprietà dei numeri reali, e la proprietà caratteristica dell'insieme dei numeri reali è un assioma di natura non costruttiva, il cosiddetto assioma di continuità (o assioma dell'estremo superiore), che dice: *Sotto le tali ipotesi, esiste un numero reale con la tal proprietà*.[4] E siccome il fondamento di tutto è in questo assioma, e questo assioma dice che un certo numero esiste, ma non dice come trovarlo, è chiaro che tutti i teoremi che si fondano su questo assioma diranno che qualcosa esiste senza dirci come fare a trovarlo. Dunque, il fatto che in analisi ci siano teoremi di esistenza non costruttivi non è un incidente di percorso, ma è nella natura delle cose.

Allora, cosa ce ne facciamo di questi teoremi di esistenza e unicità? Anzitutto, non è vero che il solo sapere che la soluzione esiste non è di alcun aiuto a cercarla: se non trovo più le chiavi di casa, ma sono certo che le ho lasciate in una certa stanza (teorema di esistenza), è più facile per me cercarle che se non avessi nessuna idea di dove le ho lasciate; il teorema di esistenza dice dove andare a mettere le mani, e dà una determinazione nella ricerca che altrimenti non avrei.

In secondo luogo, ci sono teoremi di esistenza che pur non essendo costruttivi in senso stretto (ossia non insegnando a trovare la soluzione esatta), garantiscono l'esistenza di tale soluzione e inoltre indicano un procedimento iterativo con cui trovare una soluzione approssimata, con la precisione desiderata.[5] Possiamo parlare in tal caso di teoremi «operativamente costruttivi».

I teoremi di unicità poi sono utili per un altro motivo: a volte mettersi a cercare una soluzione totalmente generica può essere scoraggiante; con un po' di ottimismo e di fiuto, però, possiamo dire: magari c'è una soluzione di questo tipo particolare; ci mettiamo allora a cercare una soluzione di quel tipo particolare, abbastanza semplice, e, se c'è, sarà più facile trovarla che se ne avessimo cercata una totalmente generica. Quando poi l'abbiamo trovata, se sappiamo che vale un teorema di unicità, siamo a posto: abbiamo trovato una soluzione, ma non ce n'è più di una, quindi abbiamo trovato «la» soluzione. In altre parole, il nostro esserci indirizzati su una strada particolare ci ha semplificato la vita e non ci ha fatto perdere altre soluzioni (più complicate), per il semplice fatto che se ne abbiamo trovata una, sappiamo che non ne possono esistere altre.

[4]Precisamente, l'assioma di continuità afferma: *Dato un insieme di numeri reali, non vuoto e superiormente limitato, esiste un numero reale che ne è l'estremo superiore*. Per maggiori dettagli e per una spiegazione dei termini si veda qualsiasi testo universitario di Analisi matematica.

[5]In generale questo significa che maggiore è la precisione che si desidera ottenere sulla soluzione, maggiore deve essere il numero di passi del procedimento iterativo di calcolo.

A parte queste considerazioni di utilità, indubbiamente teoremi di questo tipo esercitano un certo fascino su noi matematici. Ci dicono che la nostra formulazione del problema è adeguata, che gli insiemi A e B in cui abbiamo deciso di mettere i dati e cercare le soluzioni sono stati scelti bene. Spesso infatti la scelta di questi insiemi non è ovvia. Per esempio: si parte da un problema fisico, che viene modellizzato con un'opportuna equazione differenziale; ciò che è oggettivo, insito nel problema, è quale equazione scrivere; ma quali siano gli spazi di funzioni A, B in cui assegnare dati e cercare soluzioni, non è altrettanto facilmente deducibile dal significato del problema, è piuttosto una questione matematica.
I teoremi di esistenza e unicità ci dicono quindi che questo modello matematico è ben formulato, che abbiamo una teoria-quadro coerente in cui lavorare, che può essere il contesto appropriato per porsi altri problemi; ci dicono che, anche in quei casi in cui noi non siamo abbastanza bravi da trovare «con le mani» la soluzione, la soluzione c'è. In un certo senso, la nostra teoria è meglio di noi, ha una sua consistenza, eleganza, che va oltre la nostra capacità tecnica di trovare ingegnosamente la soluzione particolare per certi dati particolari. E questo è un altro genere di cose che ai matematici piace scoprire.

Avvertenza finale. Non è tutto così semplice

Ho provato a illustrare alcuni degli elementi che un matematico apprezza in un teorema o in una teoria. Essi coinvolgono alcune parole-chiave: semplicità, simmetria, generalità, desiderio di dare un volto concreto e familiare ai concetti astratti, fino a «vederli»; desiderio di costruire una teoria che sia come un'opera d'arte, bella da ammirare.
Purtroppo la matematica, quella che quotidianamente si studia o si incontra nella ricerca, non è fatta solo di enunciati semplici ed eleganti, ma anche di enunciati terribilmente complicati, che sembrano puramente tecnici, e opachi a qualsiasi luce dell'intuizione. Questi enunciati sono come il tunnel in cui occorre passare per raggiungere la meta, il paesaggio che si vuole ammirare. Attraversiamo questo tunnel con la sola luce della logica deduttiva, un passo dopo l'altro, con calma, per non inciampare. È il sacrificio da fare per arrivare dove ci interessa, dove si vedono quegli elementi di bellezza di cui ho parlato. Ci sono momenti in cui sembra di essere sempre nel tunnel, ma occorre anche imparare a guardare, per vedere il panorama. Agli studenti che affrontano lo studio della matematica universitaria, per esempio, direi: cercate dei docenti che vi insegnino ad ammirare il panorama della matematica, e non solo ad attraversare i tunnel. V